LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Le geometrie non euclidee partono da postulati opposti a quello della geometria piana di Euclide sulle rette parallele. Tale postulato afferma:

P1) In un piano, per un punto esterno a una retta data esiste un'unica retta passante per il punto dato e parallela alla retta data.

Un teorema che consegue da questo postulato è il seguente:

T1) In un triangolo, la somma degli angoli interni è 180°.

Nel 1829, N. Lobacevskij, e J. Bolyai, costruirono una geometria definita ***iperbolica*** secondo la quale:

P2) per un punto esterno a una retta data passa più di una retta parallela (se ne esiste più di una ne esistono infinite).

Come conseguenza,

T2) in un triangolo, la somma degli angoli interni è minore di 180°

Nel 1854, B. Riemann, ipotizzò la possibilità di una terza geometria, detta ***ellittica***, nella quale:

P3) per un punto esterno a una retta data non passa alcuna parallela.

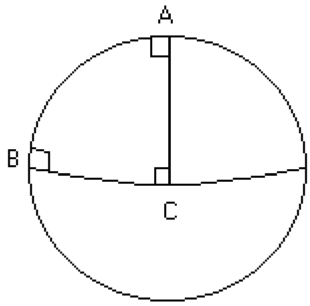
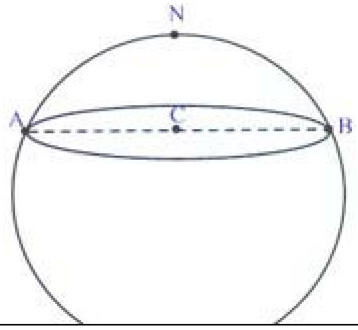
Come conseguenza,

T3) in un triangolo, la somma degli angoli interni è maggiore di 180°.

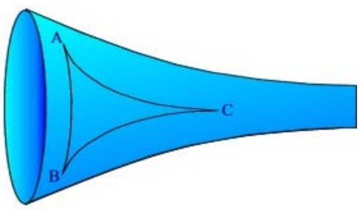
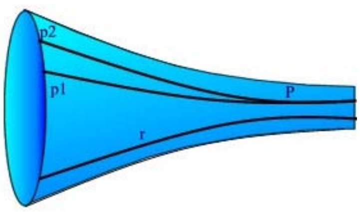
Per immaginare le due geometrie distinte da quella euclidea si può fare ricorso a dei 'modelli'.

Per la geometria ellittica o riemanniana, Invece del piano consideriamo la superficie di una sfera e traduciamo gli elementi geometrici del piano in corrispondenti elementi geometrici sulla superficie della sfera.
I punti del piano corrispondono a punti della superficie della sfera. Le rette del piano corrispondono alle circonferenze massime della superficie sferica. In generale, si fanno corrispondere alle rette del piano le linee geodetiche cioè quelle lineee che sulla superficie congiungono due punti dati. Sulla superficie della sfera le geodetiche sono proprio le circonferenze massime, cioè quelle circonferenze che si ottengono intersecando la superficie della sfera con piani passanti per il centro della sfera. Esempi familiari sono i meridiani e l'equatore, non lo sono i paralleli.

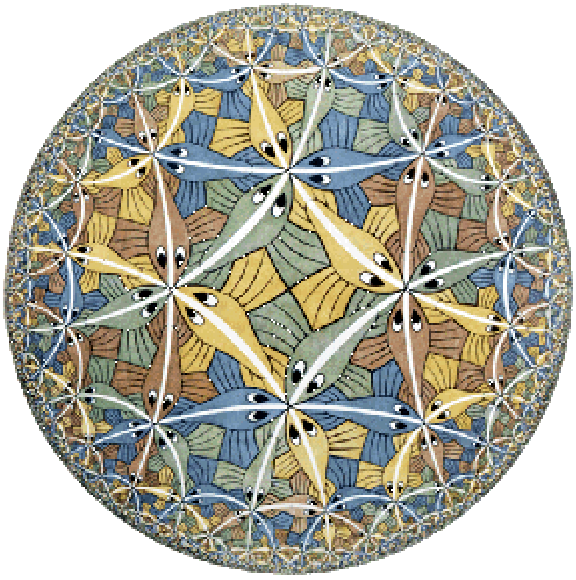
Sulla superficie della sfera non esistono 'rette' o meglio geodetiche che non si incontrano, quindi non esistono parallele.

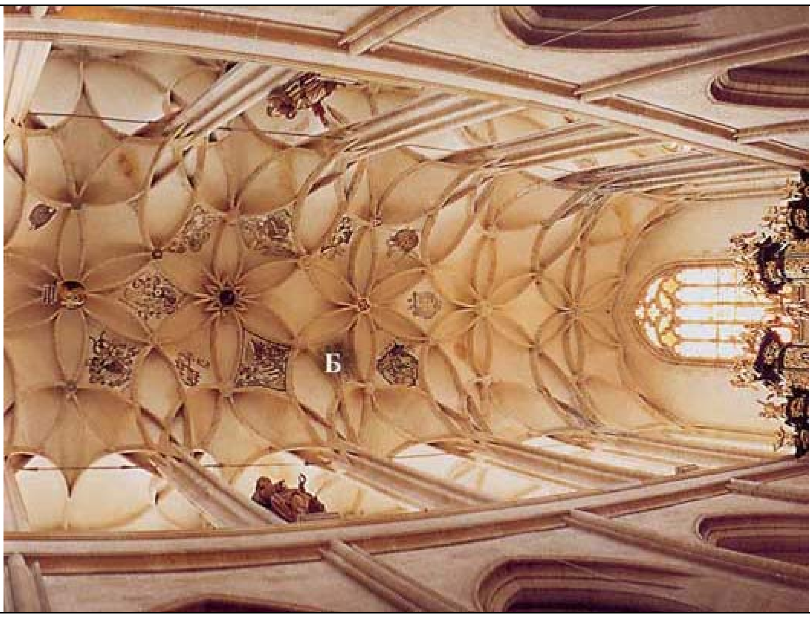
	*Vediamo come su una sfera la somma degli angoli interni di un triangolo eguaglia un angolo piatto (180°).* *Consideriamo il triangolo formato sulla superficie sferica da un punto in movimento che parte dal polo nord A (immaginiamo che questa superficie rappresenti la superficie terrestre), arriva all'equatore in B , poi lo segue per un quarto della sua lunghezza fino a C ed infine ritorna al polo nord : si tratta di un triangolo con tre angoli retti !!! e questo contraddice la regola euclidea della somma degli angoli interni di un triangolo.*
	*Un'altra caratteristica di questo tipo di geometria è che il rapporto tra circonferenza e raggio è minore di PIGRECO.* *Infatti, la circonferenza di diametro AB non ha centro in C ma in N, ricorda che siamo sulla superficie della sfera, mentre C è posto dentro la sfera. Poiché evidentemente l'arco AN è maggiore del segmento AC, il rapporto tra la circoferenza AB e il suo raggio AN è minore di PIGRECO.*

Un modello intuitivo per la geometria iperbolica è un po' più complesso. In particolare, non esiste un modello che rappresenti globalmente una geometria di questo tipo. Si può prendere una superficie a forma di sella detta anche *pseudosfera* o *trombetta*

	*Il triangolo curvilineo ABC su un pezzo di pseudosfera è il corrispondente di un triangolo rettilineo del piano euclideo, perché è composto da linee geodetiche. La somma degli angoli interni di questo triangolo è minore di 180° e dipende dalla grandezza del triangolo*
	*Per il punto P, esterno alla geodetica r, passano più geodetiche (p1 e p2) che non incontrano la geodetica r e che quindi sono parallele a r.*

GEOMETRIE IPERBOLICHE NELL'ARTE





Con l'aiuto dell'arte possiamo scoprire alcune proprietà della geometria iperbolica. A sinistra sono rappresentate un disegno dell'artista olandese Escher e parte della volta della cattedrale di Santa Barbara a Kutna' Hora (Repubblica Ceca)
Le linee bianche sul disco di Escher e la lavorazione della volta disegnano una tassellazione in triangoli e quadrilateri iperbolici. In particolare, nel disegno i lati dei triangoli e dei quadrilateri sono pezzi di circonferenze che intersecano perpendicolarmente il bordo del disco. Queste ultime sono le ``rette" della geometria iperbolica. I punti del piano iperbolico, in questo modello, sono i punti all'interno del disco.

Salta subito all'occhio che gli angoli interni dei quadrilateri misurano meno di 90 gradi. Infatti la somma degli angoli interni di un quadrilatero iperbolico è sempre minore di 360 gradi e per lo stesso principio, la somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico è sempre minore di 180 gradi.